随机环境下两周期库存系统基于风险效用的最优采购策略

宋士吉, 张 龙, 吴 澄, 吴晓晖
(清华大学自动化系, 北京 100084)

摘 要: 采用损失规避型效用函数来描述销售商对待风险的态度,本文研究了随机市场信息与随机需求的环境下使用批发价格合同的销售商在两周期库存系统中的最优采购策略问题. 证明了销售商第二周期的最优采购策略为基准库存策略,分析了第二周期的最优采购量随着第一周期的采购量变化的动态特性. 进而给出了销售商在第一周期内最优采购量的解析表示及其最优解的精细下界, 分析了每周期的最优采购量与风险规避系数的关系. 最后通过仿真试验,验证了本文的结论.

关键词: 批发价格合同; 采购策略; 效用函数; 随机优化
中图分类号: F270.5 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2006) 11-2058-05

Optimal Purchasing Strategy Based Risk Utility in Two Periods Inventory Systems under Stochastic Circumstance

SONG Shi-ji, ZHANG Long, WU Cheng, WU Xiao-hui
(*Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

Abstract: Lose averse utility function is adopted to describe retailers' attitude for treating with the risk, the problem concerning with optimal purchasing strategies of retailers in a two-periods inventory systems with wholesale price contract is investigated under the circumstance of stochastic market information and stochastic demand. It is shown that the optimal inventory strategy in the second period is base-stock policy. Then we investigate the dynamic properties of optimal purchasing quantities in the second period, which are determined in term of quantities in the first period. The analytical expression of optimal purchasing quantities with its' tighter lower bound in the first period is then given. The relationship between optimal purchasing quantities and coefficients of risk averse in every period is analyzed. Finally, conclusions of this paper are validated by some simulation experiments.

Key words: wholesale price contract, purchasing strategies, utility function, stochastic optimization

1 引言

供应链合同问题的研究是近年来供应链管理定量研究的一个热点, Tsay(1999)[1]和Lariviere(1999)[2]对该领域研究进展分别进行了综述. 传统的研究大都考虑单一销售商、单一制造商、单一产品的一次采购问题, 其需求为符合某种分布的随机变量. 如Emmons(1998)[3], Karen(2000)[4]与Charles(2002)[5]等人均采用了两周期的报童模型展开了最优采购控制策略问题的研究. Sethi[6]考虑了销售商具有两次采购机会的情况, 如果两次采购之间销售商能够获得更多的市场信息, 则能够更准确地估计需求的信息, 并指导第二次采购. 而供应链管理的一个显著特征是决策的分布性, 即, 供应链上的各个实体根据自己的目标独立地做出决策[7], 而彼此之间的联系与约束大都是依靠供需合同来制约的, 供需合同策略是决定供应链系统性能的一个重要因素.

目前, 该领域已有大量研究工作多数都是在假定销售商风险中立的前提下给出的[1~3,5,6], 即定量分析中将其期望效用作为目标函数. 而实际上, 销售商特别是中小企业, 面对激烈的市场竞争, 不会忽视市场需求的不确定性而导致的风险. 如Karven (2000)[4], Terry (2002)[8], Schweitzer(2000)[9], Barberis[10]均使用了损失规避型的效用函数来反映销售商对待风险的态度, 并结合了单个阶段的报童模型给出了有效的库存控制策略.

本文在批发价格合同框架下, 研究销售商的两周期最优采购策略问题, 即销售商在两个周期内分别以不同的批发价格从供应商那里采购商品. 如果销售商在第一周期订货, 由于供应商一般具有较长的提前期, 可实现更稳定的需求预测, 从而容易形成规模效应, 这有利于减少供应商库存, 降低成本, 所以供应商一般可以提供更低的批发价格. 而如果销售商在第二周期订货, 由于供应商的提前期相对很短, 需求波动加大, 为达到同样的服务水平, 供应商要么扩大库存, 要么增大生产能力, 这将导致生产成本的上升, 所以第二次采购的批发价格一般高于第一次采购. 销售商的目标就是根据市场信息与需求, 权衡两次采购的数量, 使销售商两次采购的收益最大.

本文将决策者风险规避的行为引入决策过程, 使用风险规避型的效用函数对销售商采购问题建模. 证明了销售商在第二周期内的最优采购策略为基准库存策略, 分析了第二周期内最优采购量随着第一周期采购量和风险系数变化的动态特性. 给出了销售商在第一周期内最优订货量的解析形式, 给出了最优解的精细下界, 分析了最优采购量与风险系数的关系. 通过仿真试验, 验证了本文的结论.

收稿日期: 2005-01-19; 修回日期: 2006-06-10
基金项目: 国家自然科学基金(No. 60574077); 973项目(No. 2002cb312205)

2　问题描述

销售商的采购时序如图 1 所示. 第一周期开始时, 销售商确定第一周期的采购量, 两周期之间销售商观测市场信息, 根据这个信息得到市场需求的分布, 并以此确定第二周期的采购量. 该模型不仅考虑到一般的库存控制问题的各个环节, 而且反映了市场需求信息对采购策略的影响.

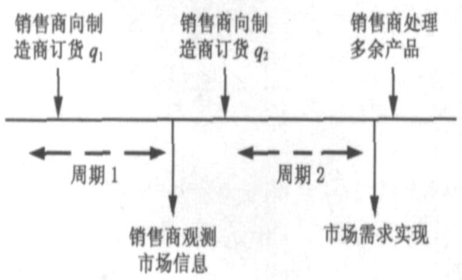

图 1　销售商采购时序

本文使用的符号规定如下:

c_1 为第一周期采购价格, c_2 为第二周期采购价格, p 为产品市场售价格, s 为剩余产品的处理价格, q_1 为第一周期内采购量, q_2 为第二周期内采购量.

我们将市场信息定义为随机变量 I, 其分布函数与概率密度函数分别为 $G(\cdot)$, $g(\cdot)$, i 是该随机变量的一个实现; 将市场需求定义为随机变量 X, 其对于市场信息 $I=i$ 的条件概率密度函数与条件分布函数分别为 $h(x|I=i)$, $H(x|I=i)$, 当 $x\le 0$ 时, 规定 $H(x|I=i)=0$ 当 $x>0$ 时, $h(x|I=i)>0$ 几乎处处成立. 从实际问题的背景出发, 允许我们假设 $p>c_2>c_1>s$.

本文采用效用函数来描述销售商面对风险的决策行为, 以期望效用作为决策目标, 这是风险管理中常用且为有效的一种处理方法[9, 10]. 在第一周期时, 由于销售商对市场需求的估计尚不够准确, 风险主要来源于市场需求的不确定性, 而非市场信息的不确定性, 故采用风险中立的效用函数. 而在第二周期, 销售商直接面对市场需求, 考虑风险因素, 假设销售商采用损失规避型效用函数, 即销售商对待风险的态度是宁愿少收益也不能多亏损. 这里

$$U_1(w)=w,\quad U_2(w)=\begin{cases} w, & w\ge 0,\\ \lambda w, & w<0,\ \lambda>1. \end{cases}\tag{1}$$

其中 λ 为风险系数, 描述决策者规避风险的程度.

假设 x 是市场需求 X 的一个实现, i 是市场信息 I 的一个实现, 则销售商的收益为

$$\Pi(q_1,q_2,i,x)=\begin{cases} px-c_1q_1-c_2q_2+s(q_1+q_2-x), & q_1+q_2\ge x,\\ p(q_1+q_2)-c_1q_1-c_2q_2, & q_1+q_2<x. \end{cases}\tag{2}$$

根据动态规划原理, 在第二周期开始时, 第一次采购量为 q_1, 市场信息 $I=i$ 已经确定, 销售商的收益为 $\Pi(q_1,q_2,i,x)$, 其决策问题是选择适当的 q_2^*, 使得损失规避型的期望效用 $E_{X|I=i}[U_2(\Pi(q_1,q_2^*,i,x))]$ 取得最大值; 而在第一周期时, 销售商面临的决策为选择适当的 q_1^*, 使得风险中立型的期望效用

$$E_I[E_{X|I=i}[U_1(\Pi(q_1,q_2^*,i,x))]]$$

取最大值. 该问题可描述为如下的优化模型:

$$\begin{aligned}&\operatorname*{Max}_{q_1\ge 0}E_I[E_{X|I=i}[U_1(\Pi(q_1,q_2^*(q_1,i),i,x))]],\\ &q_2^*(q_1,i)=\mathrm{Arg}\max_{q_1\ge 0}E_{X|I=i}[U_2(\Pi(q_1,q_2^*,i,x))].\end{aligned}\tag{3}$$

3　第二周期分析

在第二周期开始时, 市场信息已获观测. 问题转化为在市场信息与第一周期采购量分别确定时通过第二周期采购量优化销售商的期望效用. 记 $q=q_1+q_2$ 为两周期总的订货量, 则第二周期优化问题的目标函数可表示为:

$$\operatorname*{Max}_{q\ge q_1}\Pi_2(q_1,q,i)\triangleq\operatorname*{Max}_{q\ge q_1}E_{X|I=i}[U_2(\Pi(q_1,q-q_1,i,x))]\tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Pi_2(q_1,q,i)\\ &=E_{X|I=i}[U_2(\Pi(q_1,q-q_1,i,x))]\\ &=\int_{\underline{q}}^{q}[(p-s)x-(c_2-s)q+(c_2-c_1)q_1]h(x|I=i)dx\\ &\quad+\int_{q}^{+\infty}[(p-c_2)q+(c_2-c_1)q_1]h(x|I=i)dx\\ &\quad+\lambda\int_0^{\underline{q}}[(p-s)x-(c_2-s)q+(c_2-c_1)q_1]h(x|I=i)dx\end{aligned}\tag{5}$$

这里 $\underline{q}=\dfrac{(c_2-s)q-(c_2-c_1)q_1}{p-s}$ 为销售商盈亏临界需求. 式(5)中前两项对应销售商的正收益, 后一项对应销售商的亏损, 该项前面有惩罚因子 λ. 下面我们来分析函数 $\Pi_2(q_1,q,i)$ 的特性.

引理 1　对于 $q_1\ge 0$, $\Pi_2(q_1,q,i)$ 是关于 q 的凹函数.

证明　由式(5), $\Pi_2(q_1,q,i,)$ 对 q 的一阶导数为

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi_2(q_1,q,i)}{dq}=&-(c_2-s)H(q|I=i)+(p-c_2)(1-H(q|I=i))\\ &-(\lambda-1)(c_2-s)H(\underline{q}|I=i)\end{aligned}\tag{6}$$

且

$$\frac{\partial^2\Pi_2(q_1,q,i)}{\partial q^2}=-(c_2-s)h(q|I=i)-(p-c_2)h(q|I=i)-(\lambda-1)((c_2-s)^2/p-s),\ h(\underline{q}|I=i)\le 0,$$

故 $\Pi_2(q_1,q,i)$ 是关于 q 的凹函数, 引理得证.

若 $q^*(q_1,i)$ 满足式(6)等于零, 则 $q^*(q_1,i)$ 是 $\Pi_2(q_1,q,i)$ 的最优采购量. 以 $q^0(q_1,i)$ 表示式(4)的最优采购量. 则我们有如下结论:

定理 2　$q^0(q_1,i)=\max\{q^*(q_1,i),q_1\}$, 即销售商的最优库存控制策略为基准库存策略.

证明　如果 $q^*(q_1,i)\ge q_1$, 则 $q^0(q_1,i)=q^*(q_1,i)$; 如果 $q^*(q_1,i)<q_1$, 由引理 1, 当 $q>q^*(q_1,i)$ 时 $\Pi_2(q_1,q,i)$ 是关于 q 的单调下降函数, 故当 $q\ge q_1$ 时, $\Pi_2(q_1,q,i)$ 关于 q 也是单调下降的, 由式(4)的意义, 必有 $q^0(q_1,i)=q_1$. 故 $q^0(q_1,i)=\max\{q^*(q_1,i),q_1\}$.

基准库存策略是库存管理中常见的最优策略形式, 不仅理论上能够达到最优效果, 而且由于其简单的形式和易操作性, 在实际中被广泛使用.

推论 3 对于 $q_1 \geq 0$, $q^0(q_1, i)$ 是关于 λ 的一个下降函数.

证明 设 $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 > 1$, 且 $\lambda_1 < \lambda_2$. $q^*_{\lambda_1}(q_1, i)$ 和 $q^*_{\lambda_2}(q_1, i)$ 分别是相应于损失规避参数 λ_1 和 λ_2 时 $\Pi_2(q_1, q, i)$ 的最优采购量, 即满足式(6)为零的解:

$$\left.\frac{d\Pi_2(q_1, q, i)}{dq}\right|_{\substack{\lambda=\lambda_1 \\ q=q^*_{\lambda_1}(q_1, i)}} = 0,\quad \left.\frac{d\Pi_2(q_1, q, i)}{dq}\right|_{\substack{\lambda=\lambda_2 \\ q=q^*_{\lambda_2}(q_1, i)}} = 0,$$

则由式(6)可知, $\left.\frac{d\Pi_2(q_1, q, i)}{dq}\right|_{\substack{\lambda=\lambda_2 \\ q=q^*_{\lambda_1}(q_1, i)}} < 0$. 注意到 $\Pi_2(q_1, q, i)|_{\lambda=\lambda_2}$ 是关于 q 的凹函数, 具有最大值点 $q^*_{\lambda_2}(q_1, i)$ 利用其区间单调性, 可得 $q^*_{\lambda_2}(q_1, i) < q^*_{\lambda_1}(q_1, i)$. 从而 $q^*(q_1, i)$ 是关于 λ 的下降函数. 从 $q^0(q_1, i) = \max\{q^*(q_1, i), q_1\}$, 知 $q^0(q_1, i)$ 也是关于 λ 的下降函数.

第二周期中, 销售商对市场的需求保持了一定程度的风险规避, λ 越大表明销售商越加保守, 故订货数量减小与直觉相符. 这类似于风险规避型的报童模型的分析结果.

下面, 在市场信息确定, 第一周期订货量为零的情况下, 第二周期订货的销售商分别采用风险中立和损失规避态度时, 给出对应的期望效用函数最大值的比较.

我们首先给出两个引理, 其证明是平凡的, 这里不再赘述.

引理 4 如果 $F(x)$ 是一个单调增加的凸函数, 则 $F^{-1}(x)$ 为单调增加的凹函数, 反之亦然.

引理 5 如果 $F(x)$ 是一个单调增加的凹函数, $G(x)$ 为一个凹函数, 则 $F(G(x))$ 亦为凹函数.

令 q_λ 为销售商采用风险参数为 λ 的损失规避型效用函数且第一周期定购量为零时, 式(4)式的最大值, 即 $q_\lambda = q^*(0, i)$, 则由 q_λ 满足式(6)为零, 知

$$-(c_2-s)H(q_\lambda|I=i)+(p-c_2)(1-H(q_\lambda|I=i))-(\lambda-1)(c_2-s)H\left(\frac{(c_2-s)q_\lambda}{p-s}\Big|I=i\right)=0 \tag{7}$$

为考虑销售商采用风险中立型的效用函数, 在式(4)中, 将效用函数 U_2 换成 U_1, 并令 q_m 为下述优化问题

$$\operatorname*{Max}_{q\geq 0}\Pi_1(0, q, i) \triangleq \operatorname*{Max}_{q\geq 0} E_{D|I=i}[U_1(\Pi(0, q, i, x))] \tag{8}$$

的最优解. 则由式(8), 得

$$\begin{aligned}\Pi_1(0, q, i) &= E_{X|I=i}[U_1(\Pi(0, q, i, x))]\\ &= \int_0^q [(p-s)x-(c_2-s)q]h(x|I=i)dx\\ &\quad + \int_q^{+\infty}[(p-c_2)q]h(x|I=i)dx.\end{aligned}$$

令 $\left.\frac{d\Pi_1(0, q, i)}{dq}\right|_{q=q_m} = 0$, 可得

$$-(c_2-s)H(q_m|I=i)+(p-c_2)(1-H(q_m|I=i))=0 \tag{9}$$

将 q_m 代入式(7), 得

$$-(c_2-s)H(q_m|I=i)+(p-c_2)(1-H(q_m|I=i))-(\lambda-1)(c_2-s)H\left(\frac{(c_2-s)q_m}{p-s}\Big|I=i\right)<0.$$

由于 $\Pi_2(0, q, i)$ 是关于 q 的凹函数, 具有最大值点 q_λ, 利用其区间单调性, 得 $q_\lambda < q_m$.

在第二周期, 假设销售商采用风险参数为 λ 的损失规避型效用函数, 如果第一次定购的数量为 q_1, $q^*(q_1, i)$ 为 $\Pi_2(q_1, q, i)$ 的最优采购量, 即满足式(6)为零, 则下述结论成立:

定理 6 (1) $q^*(q_1, i)$ 关于 $q_1 \in [0, \infty)$ 是一个单调增加的连续函数, 且 $q_\lambda < q^*(q_1, i) \leq q_m$;

(2) 当 $q_1 \in \left[\frac{c_2-s}{c_2-c_1}q_m, +\infty\right)$ 时, $q^*(q_1, i) \equiv q_m$;

(3) 至少存在一个 $\bar{q}_1 \in \left[q_\lambda, \frac{c_2-s}{c_2-c_1}q_m\right]$, 使得 $q^*(\bar{q}_1, i) = \bar{q}_1$;

(4) 如果 $h(x|I=i)$ 在 $[q_\lambda, \bar{q}_1]$ 上为单调增加函数, 则当 $q_1 \in [0, \bar{q}_1]$ 时, $q^*(q_1, i)$ 关于 q_1 是一个单调增加的凹函数.

证明 (1) 若 $q_1, q_2 \in [0, \infty)$, 由于 $q^*(q_n, i)$ 满足式(6)为零, 故有

$$\begin{aligned}&-(c_2-s)H(q^*(q_n, i)|I=i)+(p-c_2)(1-H(q^*(q_n, i)|I=i))\\ &=(\lambda-1)(c_2-s)H\left(\frac{(c_2-s)q^*(q_n, i)-(c_2-c_1)q_n}{p-s}\Big|I=i\right),\\ &\qquad n=1, 2\end{aligned} \tag{10}$$

若 $q_1 < q_2$, 则得

$$\begin{aligned}&-(c_2-s)H(q^*(q_1, i)|I=i)+(p-c_2)(1-H(q^*(q_1, i)|I=i))\\ &-(\lambda-1)(c_2-s)H\left(\frac{(c_2-s)q^*(q_1, i)-(c_2-c_1)q_2}{p-s}\Big|I=i\right)\\ &>-(c_2-s)H(q^*(q_1, i)|I=i)+(p-c_2)(1-H(q^*(q_1, i)|I=i))\\ &-(\lambda-1)(c_2-s)H\left(\frac{(c_2-s)q^*(q_1, i)-(c_2-c_1)q_1}{p-s}\Big|I=i\right)=0\end{aligned} \tag{11}$$

而在式(11)不等号左端, 当把 $q^*(q_1, i)$ 替换为 $q^*(q_2, i)$ 时, 则由式(10), 这时左端变为零. 由于 $q^*(q_2, i)$ 为 $\Pi_2(q_1, q, i)$ 的最大值点, 故得 $q^*(q_1, i) < q^*(q_2, i)$. 从而 $q^*(q_1, i)$ 为关于 $q_1 \in [0, \infty)$ 单调增函数. 于是

$$q^*(q_1, i) > q^*(0, i) = q_\lambda \tag{12}$$

另一方面, 由式(10)又有

$$-(c_2-s)H(q^*(q_1, i)|I=i)+(p-c_2)\cdot(1-H(q^*(q_1, i)|I=i))\geq 0 \tag{13}$$

由式(9)和式(13), 注意到 q_m 为 $\Pi_1(0, q, i)$ 的最大值点, 利用区间单调性, 可得 $q^*(q_1, i) \leq q_m$.

又设 $q_n \in [0, \infty)$, $n=1, 2, \ldots$, 且 $q_n \nearrow q_1$ 或 $q_n \searrow q_1 (n \to \infty)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^*(q_n, i)$ 存在. 在式(10)两边同时取 $n \to \infty$ 时的极限, 并与 $q^*(q_1, i)$ 满足的式(10)相减, 便可推出

$$\lim_{n\to\infty} q^*(q_n, i) = q^*(q_1, i)$$

从而 $q^*(q_1, i)$ 也是一个关于 $q_1 \in [0, \infty)$ 的连续函数.

(2) 当 $q_1 \in \left[\frac{c_2-s}{c_2-c_1}q_m, +\infty\right)$ 时, 则注意到式(6)右端第三项应该满足:

$$\underline{q} = \frac{(c_2-s)q^*(q_1, i)-(c_2-c_1)q_1}{p-s} \geq 0.$$

故得 $$q^*(q_1, i) \geq \frac{c_2-c_1}{c_2-s}q_1 \geq q_m.$$

结合(1)的结论, 可得 $q^*(q_1, i) = q_m$.

(3) 利用 $q^*(q_1, i)$ 关于 q_1 的单调性, 可知 $q^*(q_\lambda, i) > q^*(0, i) = q_\lambda$. 又由于 $q^*\left(\frac{c_2 - s}{c_2 - c_1} q_m, i\right) = q_m < \frac{c_2 - s}{c_2 - c_1} q_m$. 由(1), $q^*(q_1, i)$ 关于 q_1 的连续性和介值定理, 知道至少存在一个 $\bar{q}_1 \in \left[q_\lambda, \frac{c_2 - s}{c_2 - c_1} q_m\right]$, 使得 $q^*(\bar{q}_1, i) = \bar{q}_1$.

(4) 由于 $H(x \mid I = i)$ 为一严格单调增加函数, 存在反函数. 故当 $q_1 \in [0, \bar{q}_1]$ 时,

$$q_1 = \frac{(c_2 - s) q^*}{c_2 - c_1} - \frac{p - s}{c_2 - c_1} H^{-1}\left(\frac{(p - c_2) - (p - s) H(q^* \mid I = i)}{(\lambda - 1)(c_2 - s)}\right).$$

如果 $h(x \mid I = i)$ 为 $[q_\lambda, \bar{q}_1]$ 上的单调增加函数, 则由凸函数性质, $H(x \mid I = i)$ 在该区间上为单调增加的凸函数, 从而 H^{-1} 是 $[H(q_\lambda \mid I = i), H(\bar{q}_1 \mid I = i)]$ 上的一个单调增加的凹函数, 而 $\frac{(p - c_2) - (p - s) H(q^* \mid I = i)}{(\lambda - 1)(c_2 - s)}$ 也是一个凹函数, 从而由引理 4 和引理 5, $q_1 = q_1(q^*)$ 是一个凸函数, 进而 $q^*(q_1, i)$ 是 q_1 的单调增加的凹函数.

4　第一周期分析

在第二周期的分析中, 给定第一周期的订货量 q_1, 市场信息 i 时, 我们分析了第二周期的最优订货量的特性. 利用上节结论, 本节中我们对第一周期的效用函数进行分析, 证明最优解的存在唯一性, 并给出其下界估计.

以记号 $q_2^*(q_1, i)$ 表示销售商在第二周期内的最优订货量, 则 $q_2^*(q_1, i) = q^0(q_1, i) - q_1$.

引理 7　设 $h(x \mid I = i)$ 在 $[q_\lambda, \bar{q}_1]$ 上是一个单调增加函数, 则 $E_I[E_{X \mid I = i}[\Pi(q_1, q_2^*(q_1, i), i, x)]]$ 关于 $q_1 \in [0, +\infty)$ 是一个凹函数.

证明　记 $\Pi_1(q_1, i) = E_{X \mid I = i}[\Pi(q_1, q_2^*(q_1, i), i, x)]$, 则由式(2), 我们有

$$\begin{aligned}\Pi_1(q_1, i) = & \int_0^{q_1 + q_2^*(q_1, i)} [px - c_1 q_1 - c_2 q_2^*(q_1, i) \\ & + s(q_1 + q_2^*(q_1, i) - x)] h(x \mid I = i) dx \\ & + \int_{q_1 + q_2^*(q_1, i)}^{\infty} [p(q_1 + q_2^*(q_1, i)) - c_1 q_1 \\ & - c_2 q_2^*(q_1, i))] h(x \mid I = i) dx \end{aligned} \tag{14}$$

由定理 6 的(1)和(3), 当 $q_1 \leq \bar{q}_1$ 时, $q^*(q_1, i) \geq q_1$; 当 $q_1 > \bar{q}_1$ 时, $q^*(q_1, i) \leq q_1$. 故由定理 2, 我们有

$$q^0(q_1, i) = \begin{cases} q^*(q_1, i), & 0 \leq q_1 \leq \bar{q}_1, \\ q_1, & q_1 > \bar{q}_1. \end{cases} \tag{15}$$

由式(15), 当 $q_1 \in [0, \bar{q}_1]$ 时, $q_2^*(q_1, i) = q^*(q_1, i) - q_1$. 由式(14), 我们有

$$\begin{aligned}\frac{d \Pi_1(q_1, i)}{dq_1} = & (p - c_2) \frac{dq^*(q_1, i)}{dq_1} - (p - s) \frac{dq^*(q_1, i)}{dq_1} \\ & \cdot H(q^*(q_1, i) \mid I = i) + c_2 - c_1 \end{aligned} \tag{16}$$

进而, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \Pi_1(q_1, i)}{d(q_1)^2} = & \frac{d^2 q^*(q_1, i)}{d(q_1)^2} [(p - c_2) - (p - s) H(q^*(q_1, i) \mid I = i)] \\ & - (p - s) \left[\frac{dq^*(q_1, i)}{dq_1}\right]^2 h(q^*(q_1, i) \mid I = i) \end{aligned} \tag{17}$$

由 $q^*(q_1, i)$ 满足式(6)为零, 可得

$$- (c_2 - s) H(q^*(q_1, i) \mid I = i) + (p - c_2) \cdot (1 - H(q^*(q_1, i) \mid I = i)) \geq 0.$$

进而有

$$(p - c_2) - (p - s) H(q^*(q_1, i) \mid I = i) \geq 0 \tag{18}$$

由定理 6 的(4), 可知 $\frac{d^2 q_*(q_1, i)}{d(q_1)^2} \leq 0$. 结合式(17)和(18), 可得 $\frac{d^2 \Pi_1(q_1, i)}{d(q_1)^2} \leq 0$. 从而 $\Pi_1(q_1, i)$ 在 $q_1 \in [0, \bar{q}_1]$ 上是凹函数.

当 $q_1 \in (\bar{q}_1, +\infty)$ 时, $q_2^*(q_1, i) = 0$. 由式(14), 可得 $\Pi_1(q_1, i)$ 对 q_1 的导数为:

$$\frac{d \Pi_1(q_1, i)}{dq_1} = p - c_1 - (p - s) H(q_1 \mid I = i) \tag{19}$$

进而 $\frac{d^2 \Pi_1(q_1, i)}{d(q_1)^2} = -(p - s) h(q_1 \mid I = i) \leq 0$. 因而 $\Pi_1(q_1, i)$ 在 $(\bar{q}_1, +\infty)$ 上也是凹函数.

综上所证, $\Pi_1(q_1, i)$ 关于 $q_1 \in [0, +\infty)$ 是一个凹函数, 故 $E_I[\Pi_1(q_1, i)]$ 也是一个关于 q_1 的凹函数.

定理 8　存在某一个 $i_0 \in I$, 使得 $E_I[E_{D \mid I}[\Pi(q_1, q_2^*, I, D)]]$ 的最优解 q_1^* 满足

$$H(q_1^* \mid I = i_0) = \frac{p - c_1}{p - s}, \text{且 } q_m < q_1^*,$$

进而 $q^0(q_1, i_0) = q_1^*$.

证明　记 $V(q_1) = E_I[E_{D \mid I}[\Pi(q_1, q_2^*, I, D)]]$. 由于 $V(q_1)$ 关于 $q_1 \in [0, +\infty)$ 是一个凹函数, 因此 $V(q_1)$ 存在唯一的最大值点 $q_1^* \in [0, +\infty)$. 下面证明: $q_m \leq q_1^*$.

由于 $\frac{dV(q_1)}{dq_1} = \int_0^{+\infty} \frac{d \Pi_1(q_1, i)}{dq_1} g(i) di$. 注意到引理 7 证明过程的式(16)与(19), 由于 $g(i) \geq 0$ 为市场信息概率密度函数, 并利用条件概率密度函数 $h(x \mid I = i)$ 关于 $i \in [0, +\infty)$ 的连续性, 知道存在 $i_0 \in [0, +\infty)$ 使得

$$\begin{aligned} 0 = & \left.\frac{dV(q_1)}{dq_1}\right|_{q_1 = q_1^*} = \int_0^{+\infty} \left.\frac{d \Pi_1(q_1, i)}{dq_1}\right|_{q_1 = q_1^*} g(i) di \\ = & \left.\frac{d \Pi_1(q_1, i_0)}{dq_1}\right|_{q_1 = q_1^*} \end{aligned} \tag{20}$$

下面, 我们首先证明: $q_1^* \in (\bar{q}_1, +\infty)$.

事实上, 对任意的 $i \in [0, +\infty)$, 当 $q_1 \in [0, \bar{q}_1]$ 时, 由定理 6 的(1)和(3), 知 $q^*(q_1, i) \leq q^*(\bar{q}_1, i) = \bar{q}_1$, 故得

$$H(q^*(q_1, i) \mid I = i) \leq H(\bar{q}_1 \mid I = i) \tag{21}$$

又由于 $\bar{q}_1$ 满足式(6)为零, 于是

$$\begin{aligned} & -(c_2 - s) H(\bar{q}_1 \mid I = i) + (p - c_2)(1 - H(\bar{q}_1 \mid I = i)) \\ & = (\lambda - 1)(c_2 - s) H\left(\frac{(c_2 - s)\bar{q}_1 - (c_2 - c_1)\bar{q}_1}{p - s} \mid I = i\right) \\ & = (\lambda - 1)(c_2 - s) H\left(\frac{(c_1 - s)\bar{q}_1}{p - s} \mid I = i\right) \geq 0. \end{aligned} \tag{22}$$

由式(22)左端大于零, 推知 $H(\bar{q}_1 \mid I = i) \leq \frac{p - c_2}{p - s}$, 再结合式

(21), 得 $$H(q^*(q_1, i)|I=i) \le \frac{p-c_2}{p-s} \tag{23}$$
利用定理 6 的(1), $q^*(q_1, i)$ 关于 $q_1 \in [0, \infty)$ 的单调性, 有 $\frac{dq^*(q_1, i)}{dq_1} \ge 0$. 由式(23), 知式(16)左端 $\frac{d\prod_1(q_1, i)}{dq_1} > 0$. 因此由式(20), 知 $q_1^* \in (\bar{q}_1, +\infty)$.

从而由式(19)和(20), 知 $\left.\frac{d\prod_1(q_1, i_0)}{dq_1}\right|_{q_1=q_1^*} = p-c_1-(p-s)H(q_1^* | I=i_0) = 0$. 故
$$H(q_1^* | I=i_0) = \frac{p-c_1}{p-s} \tag{24}$$
再由式(9)和(24), 可得
$$H(q_m | I=i_0) = \frac{p-c_2}{p-s} < \frac{p-c_1}{p-s} = H(q_1^* | I=i_0) \tag{25}$$
从而 $q_m < q_1^*$, 再由式(15), 便知 $q^0(q_1, i) = q_1^*$.

推论 9 第一周期最优定购量 q_1^* 与风险系数 λ 无关.

证明可从定理 8 结论立得. 由于第一周期采用风险中立的效用函数, 在第二周期内定购量为零. 这一结论符合实际采购过程.

5 仿真实验

为了验证本文的结论, 我们在这一节进行仿真实验. 仿真参数如下: 设市场信息服从均匀分布, 市场需求对市场信息的条件分布服从正态分布, 上面一条曲线对应的正态分布的均值为 6, 方差为 25, 下面一条曲线对应的正态分布的均值为 6, 方差为 9, 商品价格参数取值分别为: $s=1$, $c_1=1.3$, $c_2=2.5$, $p=4$, 其中最优库存控制策略按本文的方法确定.

图2 为不同的市场信息下 q^* 与 q_1 的关系, 当 $q_1 \in \left[0, \frac{c_2-s}{c_2-c_1}q_m\right]$ 时, q^* 随 q_1 的增大而增大, 且是 q_1 的凹函数, 在 $q_1 \in \left[\frac{c_2-s}{c_2-c_1}q_m, +\infty\right)$ 时, q^* 取固定值, 这与定理 6 的结论一致. 对于不同的 i, q^* 的拐点分布在直线 $q^* = \frac{c_2-c_1}{c_2-s}q_1$ 上.

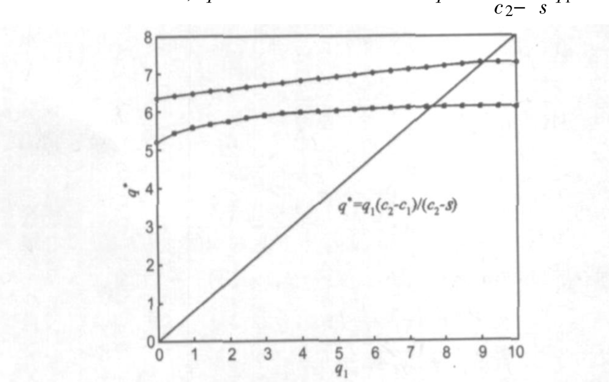

图 2 最优二次采购量与一次采购量的关系

6 结论

本文对双周期批发合同框架下销售商的最优采购策略进行了分析, 两次采购之间销售商可以获得市场信息从而指导第二次采购. 采用损失规避型效用函数来描述销售商规避风险的行为以反映对决策的影响. 证明了销售商在第二周期的最优采购策略为基准库存策略, 给出了销售商在第一周期最优订货量的最优解的解析表示和精细的下界估计, 分析了销售商采用不同程度的风险规避措施对两次采购策略形成的影响.

参考文献:

[1] Tsay A, Nahmias S, Agawal. Modeling supply chain contracts: A review [A]. Sridhar Tayur, Ram Ganeshan, Michael Magazine. Quantitative Models for Supply Chain Management [C]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999. 301– 336.

[2] Martin A Lariviere. Supply chain contracting and coordination with stochastic demand [A]. Sridhar Tayur, Ram Ganeshan, Michael Magazine. Quantitative Models for Supply Chain Management [C]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999. 235 – 268.

[3] Emmons H, Gilbert S. Returns policies in pricing and inventory decisions forcatalogue goods [J]. Management Science, 1998, 44(2): 276– 283.

[4] Donohue Karen L. Efficient supply contracts for fashion goods with forecast updating and two production modes [J]. Management Science, 2000, 46(11): 1397– 1411.

[5] Charles X Wang. A general framework of supply chain contract models [A]. Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the Decision Sciences Institute [C]. San Diego, CA, 2002. 430– 436.

[6] Sethi S P, Yan H, Zhang H. Peeling layers of an onion: A periodic review inventory model with multiple delivery modes and forecast updates [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 108(2): 253– 281.

[7] Jeuland A P, Shugan S M. Managing channel profits [J]. Marketing Science, 1983, 2(3): 239– 272.

[8] Taylor T A. Supply chain coordination under channel rebates with sales effort effects [J]. Management Science, 2002, 48 (8): 992– 1007.

[9] Schweitzer M E, Cachon G P. Decision bias in the newsvendor problem with a known demand distribution: Experimental evidence [J]. Management Science, 2000, 46(3): 404– 420.

[10] Barberis N, Huang M. Mental accounting, loss aversion, and individual stock returns [J]. Journal of Finance, 2001, 56(4): 1247– 1292.

作者简介:

宋士吉 男, 1965 年生于黑龙江省富锦市, 1996 年获基础数学专业博士学位, 两次完成博士后研究工作, 研究兴趣主要集中在随机优化, 供应链管理和生产制造过程调度与优化理论, 发表 SCI 和 EI 及复杂核心期刊论文 80 余篇.

E-mail: shijis@mail.tsinghua.edu.cn